Operadores multilineales con oscilación acotada y aplicaciones

Ibañez Firnkorn, Gonzalo

trabajo en conjunto con
Mingming Cao (ICMAT - España),
Israel Rivera-Ríos (Univ. Malaga - España),
Qingying Xue (Beijing Normal Univ. - China),
Kôzô Yabuta (Kwansei Gakuin Univ. - Japan)

Instituto de Matemática (INMABB), Departamento de Matemática,
Universidad Nacional del Sur (UNS)-CONICET

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro 2023

Consideremos un espacio de medida (Σ, μ). Una familia de conjuntos $\mathscr{B}$ en Σ es una "base de bolas" si

Consideremos un espacio de medida (Σ, μ). Una familia de conjuntos $\mathscr{B}$ en Σ es una "base de bolas" si

- $\mathscr{B}$ es una base, $0 < \mu(B) < \infty$ para cualquier $B \in \mathscr{B}$.

Consideremos un espacio de medida (Σ, μ). Una familia de conjuntos $\mathscr{B}$ en Σ es una "base de bolas" si

- $\mathscr{B}$ es una base, $0 < \mu(B) < \infty$ para cualquier $B \in \mathscr{B}$.
- para cualquier par de puntos $x, y \in \Sigma$, existe algún $B \in \mathscr{B}$ tal que $x, y \in B$.

Consideremos un espacio de medida (Σ, μ). Una familia de conjuntos $\mathscr{B}$ en Σ es una "base de bolas" si

- $\mathscr{B}$ es una base, $0 < \mu(B) < \infty$ para cualquier $B \in \mathscr{B}$.
- para cualquier par de puntos $x, y \in \Sigma$, existe algún $B \in \mathscr{B}$ tal que $x, y \in B$.
- Para cualquier $\varepsilon > 0$ y E un medible, existe una sucesión $\{B_k\} \subset \mathscr{B}$ tal que $\mu(E \vartriangle \bigcup_k B_k) < \varepsilon$.

Consideremos un espacio de medida (Σ, μ). Una familia de conjuntos $\mathscr{B}$ en Σ es una “base de bolas” si

- $\mathscr{B}$ es una base, $0 < \mu(B) < \infty$ para cualquier $B \in \mathscr{B}$.
- para cualquier par de puntos $x, y \in \Sigma$, existe algún $B \in \mathscr{B}$ tal que $x, y \in B$.
- Para cualquier $\varepsilon > 0$ y E un medible, existe una sucesión $\{B_k\} \subset \mathscr{B}$ tal que $\mu(E \bigtriangleup \bigcup_k B_k) < \varepsilon$.

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Consideremos un espacio de medida (Σ, μ). Una familia de conjuntos $\mathscr{B}$ en Σ es una "base de bolas" si

- $\mathscr{B}$ es una base, $0 < \mu(B) < \infty$ para cualquier $B \in \mathscr{B}$.
- para cualquier par de puntos $x, y \in \Sigma$, existe algún $B \in \mathscr{B}$ tal que $x, y \in B$.
- Para cualquier $\varepsilon > 0$ y E un medible, existe una sucesión $\{B_k\} \subset \mathscr{B}$ tal que $\mu(E \triangle \bigcup_k B_k) < \varepsilon$.
- Para todo $B \in \mathscr{B}$, existe $B^* \in \mathscr{B}$ tal que $\mu(B^*) \leq C\mu(B)$

$$\bigcup_{\substack{B' \in \mathscr{B} : B' \cap B \neq \emptyset, \\ \mu(B') \leq 2\mu(B)}} B' \subset B^* \qquad \text{y} \qquad A \subset B \Rightarrow A^* \subset B^*$$

con $C \geq 1$ universal.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^n$, si $\mathscr{B} = \{\text{bolas}\}$ o $\{\text{cubos}\}$ entonces $\mathscr{B}$ es base de bolas en $(\mathbb{R}^n, dx)$ con dx la medida de Lebesgue.
  En este caso $\mu(B^*) \subset \kappa^n \mu(B)$ y $B^* = \kappa B$ con $\kappa = 1 + 2^{1+\frac{1}{n}}$

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^n$, si $\mathscr{B} = \{\text{bolas}\}$ o $\{\text{cubos}\}$ entonces $\mathscr{B}$ es base de bolas en $(\mathbb{R}^n, dx)$ con dx la medida de Lebesgue.
  En este caso $\mu(B^*) \subset \kappa^n \mu(B)$ y $B^* = \kappa B$ con $\kappa = 1 + 2^{1+\frac{1}{n}}$
- $\mathscr{B} = \{\text{cubos diádicos}\}$ en $\mathbb{R}^n$

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^n$, si $\mathscr{B} = \{\text{bolas}\}$ o $\{\text{cubos}\}$ entonces $\mathscr{B}$ es base de bolas en $(\mathbb{R}^n, dx)$ con dx la medida de Lebesgue.
  En este caso $\mu(B^*) \subset \kappa^n \mu(B)$ y $B^* = \kappa B$ con $\kappa = 1 + 2^{1+\frac{1}{n}}$
- $\mathscr{B} = \{\text{cubos diádicos}\}$ en $\mathbb{R}^n$ NO es una base de bolas pues no cumplen la segunda condición.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^n$, si $\mathscr{B} = \{\text{bolas}\}$ o $\{\text{cubos}\}$ entonces $\mathscr{B}$ es base de bolas en $(\mathbb{R}^n, dx)$ con dx la medida de Lebesgue.
  En este caso $\mu(B^*) \subset \kappa^n \mu(B)$ y $B^* = \kappa B$ con $\kappa = 1 + 2^{1+\frac{1}{n}}$
- $\mathscr{B} = \{\text{cubos diádicos}\}$ en $\mathbb{R}^n$ NO es una base de bolas pues no cumplen la segunda condición.
- Sea (Σ, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo y consideremos $\mathscr{B} = \{\text{bolas}\}$.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^n$, si $\mathscr{B} = \{\text{bolas}\}$ o $\{\text{cubos}\}$ entonces $\mathscr{B}$ es base de bolas en $(\mathbb{R}^n, dx)$ con dx la medida de Lebesgue.
  En este caso $\mu(B^*) \subset \kappa^n \mu(B)$ y $B^* = \kappa B$ con $\kappa = 1 + 2^{1+\frac{1}{n}}$
- $\mathscr{B} = \{\text{cubos diádicos}\}$ en $\mathbb{R}^n$ NO es una base de bolas pues no cumplen la segunda condición.
- Sea (Σ, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo y consideremos $\mathscr{B} = \{\text{bolas}\}$. Si $\mathscr{B}$ cumple condición de densidad entonces $\mathscr{B}$ es una base de bolas.

Introducimos la siguiente notación

$$\lfloor f \rfloor_{B,r} := \sup_{B' \in \mathscr{B}: B' \supset B} \langle f \rangle_{B',r}, \qquad \text{donde} \qquad \langle f \rangle_{B,r} := \left(\fint_B |f|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Consideremos operadores T m-sublineales, esto es

$$|T(f_1, \ldots, \lambda f_i, \ldots, f_m)| = |\lambda| |T(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m)|,$$
$$|T(f_1, \ldots, f_i + g_i, \ldots, f_m)| \leq |T(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m)| + |T(f_1, \ldots, g_i, \ldots, f_m)|.$$

Maximal multilineal de Hardy-Littlewood:
Dado $1 \leq r < \infty$

$$M_{\mathscr{B},r}(\vec{f})(x) := \sup_{B\in\mathscr{B}:x\in\mathscr{B}} \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_{B,r}$$

Maximal multilineal de Hardy-Littlewood:
Dado $1 \leq r < \infty$

$$M_{\mathscr{B},r}(\vec{f})(x) := \sup_{B\in\mathscr{B}:x\in\mathscr{B}} \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_{B,r}$$

Se cumple que:

- Para cada $B_0 \in \mathscr{B}$ tal que $B_0^* \subsetneq \Sigma$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \supsetneq B_0$ y

$$|M_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\chi_{B^*})(x) - M_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\chi_{B_0^*})(x)| \leq \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_{B^*,r}$$

Maximal multilineal de Hardy-Littlewood:
Dado $1 \leq r < \infty$

$$M_{\mathscr{B},r}(\vec{f})(x) := \sup_{B\in\mathscr{B}:x\in\mathscr{B}} \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_{B,r}$$

Se cumple que:

- Para cada $B_0 \in \mathscr{B}$ tal que $B_0^* \subsetneq \Sigma$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \supsetneq B_0$ y

$$|M_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\chi_{B^*})(x) - M_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\chi_{B_0^*})(x)| \leq \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_{B^*,r}$$

- Para toda $B \in \mathscr{B}$ tenemos que

$$\begin{aligned} &|\big(M_{\mathscr{B},r}(\vec{f}) - M_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\mathbf{1}_{B^*})\big)(x) - \big(M_{\mathscr{B},r}(\vec{f}) - M_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\mathbf{1}_{B^*})\big)(x')| \\ &\qquad \lesssim \prod_{i=1}^{m} \lfloor f_i \rfloor_{B,r}. \end{aligned}$$

Operadores ω-Calderón-Zygmund:
Sea (Σ, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo.
Sea $\mathscr{B}_\rho$ la familia de todas las bolas en el espacio métrico (Σ, ρ) tal que cumple una condición de densidad.

Operadores ω-Calderón-Zygmund:
Sea (Σ, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo.
Sea $\mathscr{B}_\rho$ la familia de todas las bolas en el espacio métrico (Σ, ρ) tal que cumple una condición de densidad.
Sea $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que

$$\|\omega\|_{\mathrm{Dini}} = \int_0^1 \omega(t) \frac{dt}{t} < \infty$$

Una función $K : \Sigma^{m+1} \setminus \{x = y_1 = \cdots = y_m\} \to \mathcal{C}$ se dice núcleo de ω-Calderón-Zygmund m-lineal si

$$|K(x, \vec{y})| \leq \frac{C_K}{\left(\sum_{i=1}^m \mu(B(x, \rho(x, y_i)))\right)^m}$$

$$|K(x, \vec{y}) - K(x', \vec{y})| \leq \frac{C_K}{\left(\sum_{i=1}^m \mu(B(x, \rho(x, y_i)))\right)^m} \omega\left(\frac{\rho(x, x')}{\max_{1 \leq i \leq m} \rho(x, y_i)}\right)$$

Consideremos los operadores ω-Calderón-Zygmund

$$T(\vec{f})(x) = \int_{\Sigma^m \setminus \{x=y_1=\cdots=y_m\}} K(x,\vec{y}) f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\, d\mu(\vec{y}),$$

para cada $x \in \cap_{i=1}^m \mathrm{supp}(f_i)$.
Supongo T acotado de $L^{q_1} \times \cdots \times L^{q_m}$ en L^q, con $\frac{1}{q} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i}$ y $q_i \in (1,\infty)$.

Consideremos los operadores ω-Calderón-Zygmund

$$T(\vec{f})(x) = \int_{\Sigma^m \setminus \{x=y_1=\cdots=y_m\}} K(x,\vec{y}) f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\, d\mu(\vec{y}),$$

para cada $x \in \cap_{i=1}^m \mathrm{supp}(f_i)$.
Supongo T acotado de $L^{q_1} \times \cdots \times L^{q_m}$ en L^q, con $\frac{1}{q} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i}$ y $q_i \in (1,\infty)$.
Luego

- Para cada $B_0 \in \mathscr{B}$ tal que $B_0^* \subsetneq \Sigma$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \supsetneq B_0$ y

$$|T_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\chi_{B^*})(x) - T_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\chi_{B_0^*})(x)| \lesssim C_K \prod_{i=1}^m \langle f_i \rangle_{B^*,1}$$

Consideremos los operadores ω-Calderón-Zygmund

$$T(\vec{f})(x) = \int_{\Sigma^m \setminus \{x=y_1=\cdots=y_m\}} K(x,\vec{y}) f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\, d\mu(\vec{y}),$$

para cada $x \in \cap_{i=1}^m \mathrm{supp}(f_i)$.
Supongo T acotado de $L^{q_1} \times \cdots \times L^{q_m}$ en L^q, con $\frac{1}{q} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i}$ y $q_i \in (1,\infty)$.
Luego

- Para cada $B_0 \in \mathscr{B}$ tal que $B_0^* \subsetneq \Sigma$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \supsetneq B_0$ y

$$|T_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\chi_{B^*})(x) - T_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\chi_{B_0^*})(x)| \lesssim C_K \prod_{i=1}^m \langle f_i \rangle_{B^*,1}$$

- Para toda $B \in \mathscr{B}$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\left|\big(T_{\mathscr{B},r}(\vec{f}) - T_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\mathbf{1}_{B^*})\big)(x) - \big(T_{\mathscr{B},r}(\vec{f}) - T_{\mathscr{B},r}(\vec{f}\mathbf{1}_{B^*})\big)(x')\right| \\ &\lesssim \|\omega\|_{Dini} \prod_{i=1}^m \lfloor f_i \rfloor_{B,1}. \end{aligned}$$

Un operador T es un operador multilineal con oscilación acotada con respecto a $\mathscr{B}$ y $r \in [1, \infty)$ si para toda $\vec{f} \in L^r(\Sigma, \mu)^m$

Un operador T es un operador multilineal con oscilación acotada con respecto a $\mathscr{B}$ y $r \in [1, \infty)$ si para toda $\vec{f} \in L^r(\Sigma, \mu)^m$

(T1) Para cada $B_0 \in \mathscr{B}$ con $B_0^* \subsetneq \Sigma$, existe $B \in \mathscr{B}$ con $B \supsetneq B_0$ tal que

$$\sup_{x \in B_0} |T(\vec{f}\mathbf{1}_{B^*})(x) - T(\vec{f}\mathbf{1}_{B_0^*})(x)| \leq \mathcal{C}_1(T) \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_{B^*,r}.$$

Un operador T es un operador multilineal con oscilación acotada con respecto a $\mathscr{B}$ y $r \in [1,\infty)$ si para toda $\vec{f} \in L^r(\Sigma,\mu)^m$

(T1) Para cada $B_0 \in \mathscr{B}$ con $B_0^* \subsetneq \Sigma$, existe $B \in \mathscr{B}$ con $B \supsetneq B_0$ tal que

$$\sup_{x \in B_0} |T(\vec{f}\mathbf{1}_{B^*})(x) - T(\vec{f}\mathbf{1}_{B_0^*})(x)| \leq \mathcal{C}_1(T) \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_{B^*,r}.$$

(T2) Para cada $B \in \mathscr{B}$,

$$\sup_{x,x' \in B} \left|\big(T(\vec{f}) - T(\vec{f}\mathbf{1}_{B^*})\big)(x) - \big(T(\vec{f}) - T(\vec{f}\mathbf{1}_{B^*})\big)(x')\right| \leq \mathcal{C}_2(T) \prod_{i=1}^{m} \lfloor f_i \rfloor_{B,r}.$$

Otros ejemplos:

- Operadores multiplicadores de Fourier

Otros ejemplos:

- Operadores multiplicadores de Fourier
- Operadores maximales de una familia de operadores

Otros ejemplos:

- Operadores multiplicadores de Fourier
- Operadores maximales de una familia de operadores
- Conmutadores de Calderón

Otros ejemplos:

- Operadores multiplicadores de Fourier
- Operadores maximales de una familia de operadores
- Conmutadores de Calderón
- Operadores multilineales con condición de Hörmander

Dado $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, con cada b_i una función medible y $k \in \mathbb{N}$,

$$[T, \mathbf{b}]_{ke_i}(\vec{f})(x) = T(f_1, \ldots, (b_i(x) - b_i)^k f_i, \ldots, f_m)(x)$$

Dado $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, con cada b_i una función medible y $k \in \mathbb{N}$,

$$[T, \mathbf{b}]_{ke_i}(\vec{f})(x) = T(f_1, \ldots, (b_i(x) - b_i)^k f_i, \ldots, f_m)(x)$$

y sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$

$$\begin{aligned} [T, \mathbf{b}]_\alpha(\vec{f})(x) &= [\cdots, [[T, \mathbf{b}]_{\alpha_1 e_1}, \mathbf{b}]_{\alpha_2 e_2}], \ldots, \mathbf{b}]_{\alpha_m e_m}(\vec{f})(x) \\ &= \int_{\Sigma^m} \prod_{i=1}^{m} (b_i(x) - b_i(y_i))^{\alpha_i} K(x, \vec{y}) \prod_{j=1}^{m} f_j(y_j) d\mu(\vec{y}). \end{aligned}$$

donde K es el núcleo de T.

Una colección $\mathcal{S} \subset \mathscr{B}$ se dice η-sparse, $\eta \in (0, 1)$, si para cualquier $B \in \mathcal{S}$ existe $E_B \subset B$ tales que $\mu(E_B) \geq \eta\mu(B)$ y $\{E_B\}_{B \in \mathcal{S}}$ son disjuntos dos a dos.

Una colección $\mathcal{S} \subset \mathscr{B}$ se dice η-sparse, $\eta \in (0,1)$, si para cualquier $B \in \mathcal{S}$ existe $E_B \subset B$ tales que $\mu(E_B) \geq \eta\mu(B)$ y $\{E_B\}_{B\in\mathcal{S}}$ son disjuntos dos a dos. Dados $\mathcal{S}$ una familia sparse y $r \in [1,\infty)$ definimos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S},r}(\vec{f})(x) = \sum_{B\in\mathcal{S}} \langle f_1\rangle_{B,r} \cdots \langle f_m\rangle_{B,r} \chi_B(x)$$

Una colección $\mathcal{S} \subset \mathscr{B}$ se dice η-sparse, $\eta \in (0,1)$, si para cualquier $B \in \mathcal{S}$ existe $E_B \subset B$ tales que $\mu(E_B) \geq \eta\mu(B)$ y $\{E_B\}_{B\in\mathcal{S}}$ son disjuntos dos a dos. Dados $\mathcal{S}$ una familia sparse y $r \in [1,\infty)$ definimos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S},r}(\vec{f})(x) = \sum_{B\in\mathcal{S}} \langle f_1\rangle_{B,r} \cdots \langle f_m\rangle_{B,r}\chi_B(x)$$

Sean dos subconjuntos disjuntos $\tau_1, \tau_2 \subset \{1,2,\ldots,m\}$, definimos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_1,r}^{\mathbf{b},\tau_1,\tau_2}(\vec{f})(x) = \sum_{B\in\mathcal{S}} \left(\prod_{i\in\tau_1} |b_i(x) - b_{i,B}|\langle f_i\rangle_{B,r}\right)\left(\prod_{j\in\tau_2} \langle (b_j(x) - b_{j,B})f_j\rangle_{B,r}\right) \times \left(\prod_{k\notin\tau_1\cup\tau_2} \langle f_k\rangle_{B,r}\right)\chi_B(x)$$

Resultado principal

Resultado principal

Sean $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ con cada b_i medible, $\alpha \in \{0,1\}^m$.
Sea T es un operador multilineal con oscilación acotada con respecto a $\mathscr{B}$ y $r \in [1,\infty]$ tal que T es acotado de $L^r \times \cdots \times L^r$ en $L^{\frac{r}{m},\infty}$,

Resultado principal

Sean $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ con cada b_i medible, $\alpha \in \{0,1\}^m$.
Sea T es un operador multilineal con oscilación acotada con respecto a $\mathscr{B}$ y $r \in [1,\infty]$ tal que T es acotado de $L^r \times \cdots \times L^r$ en $L^{\frac{r}{m},\infty}$,

Teorema

Luego para toda $B \in \mathscr{B}$ *y* $f_i \in L^r$ *con* $\|f_i\|_{L^r(B)} \geq 2^{-\frac{1}{r}} \|f_i\|_{L^r(\Sigma)}$, $i = 1, \dots, m$, *existen dos familias sparse* $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathscr{B}$ *talque que p.p.*$x \in B$,

$$|T(\vec{f})(x)| \lesssim \mathcal{A}_{\mathcal{S}_1,r}(\vec{f})(x) + \mathcal{A}_{\mathcal{S}_2,r}(\vec{f})(x)$$
$$|[T,\mathbf{b}]_\alpha(\vec{f})(x)| \lesssim \sum_{\tau_1 \cup \tau_2 = \tau} \mathcal{A}^{\mathbf{b},\tau_1,\tau_2}_{\mathcal{S}_1,r}(\vec{f})(x) + \mathcal{A}^{\mathbf{b},\tau_1,\tau_2}_{\mathcal{S}_2,r}(\vec{f})(x)$$

donde $\tau = \tau(\alpha) = \{i : \alpha_i \neq 0\}$

Consideremos las siguiente familias de pesos.
Sea $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m)$. Se dice $\vec{w} \in A_{\vec{p},\mathscr{B}}$, $1 \leq p_1, \ldots, p_m < \infty$ si

$$[\vec{w}]_{A_{\vec{p},\mathscr{B}}} := \sup_{B \in \mathscr{B}} \left(\fint_B w \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{i=1}^{m} \left(\fint_B w_i^{1-p_i'} d\mu \right)^{\frac{1}{p_i'}} < \infty,$$

donde $w = \prod_{i=1}^m w^{\frac{p}{p_i}}$ y $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$.

Consideremos las siguiente familias de pesos.
Sea $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m)$. Se dice $\vec{w} \in A_{\vec{p},\mathscr{B}}$, $1 \leq p_1, \ldots, p_m < \infty$ si

$$[\vec{w}]_{A_{\vec{p},\mathscr{B}}} := \sup_{B \in \mathscr{B}} \left(\fint_B w \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{i=1}^{m} \left(\fint_B w_i^{1-p_i'} d\mu \right)^{\frac{1}{p_i'}} < \infty,$$

donde $w = \prod_{i=1}^m w^{\frac{p}{p_i}}$ y $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$.
Si $m = 1$, $p_i = p$, tenemos las clases $A_{p,\mathscr{B}}$ y $A_{\infty,\mathscr{B}} = \cup_{p \geq 1} A_{p,\mathscr{B}}$.

Consideremos las siguiente familias de pesos.
Sea $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m)$. Se dice $\vec{w} \in A_{\vec{p},\mathscr{B}}$, $1 \leq p_1, \dots, p_m < \infty$ si

$$[\vec{w}]_{A_{\vec{p},\mathscr{B}}} := \sup_{B \in \mathscr{B}} \left(\fint_B w \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{i=1}^{m} \left(\fint_B w_i^{1-p_i'} d\mu \right)^{\frac{1}{p_i'}} < \infty,$$

donde $w = \prod_{i=1}^m w^{\frac{p}{p_i}}$ y $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$.
Si $m = 1$, $p_i = p$, tenemos las clases $A_{p,\mathscr{B}}$ y $A_{\infty,\mathscr{B}} = \cup_{p \geq 1} A_{p,\mathscr{B}}$.
Las clase Reverse Hölder $RH_{s,\mathscr{B}}$ con $s > 1$

$$[w]_{RH_{s,\mathscr{B}}} := \sup_{B \in \mathscr{B}} \left(\fint_B w^s \, d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \left(\fint_B w \, d\mu \right)^{-1} < \infty.$$

Corolarios

- Decaimiento exponencial:

- Decaimiento exponencial:
  Existe $\gamma > 0$ tal que para toda $B \in \mathscr{B}$ y $f_i \in L^\infty_c$ con $\operatorname{supp}(f_i) \subset B$, $1 \leq i \leq m$,

$$\mu(\{x \in B : |T(\vec{f})(x)| > t\mathcal{M}_{\mathscr{B},r}(\vec{f})(x)\}) \lesssim e^{-\gamma t}\mu(B),$$

  para todo $t > 0$.

Corolarios

- Decaimiento exponencial:
  Existe $\gamma > 0$ tal que para toda $B \in \mathscr{B}$ y $f_i \in L^\infty_c$ con $\operatorname{supp}(f_i) \subset B$, $1 \leq i \leq m$,

$$\mu(\{x \in B : |T(\vec{f})(x)| > t\mathcal{M}_{\mathscr{B},r}(\vec{f})(x)\}) \lesssim e^{-\gamma t}\mu(B),$$

  para todo $t > 0$.
  Si $A_{\infty,\mathscr{B}}$ cumple una propiedad de reverse-Hölder sharp, entonces

$$\mu(\{x \in B : |[T, \mathbf{b}]_\alpha(\vec{f})(x)| > t\mathcal{M}_{\mathscr{B},r}(\vec{f^*})(x)\}) \lesssim e^{-\left(\frac{\gamma t}{\|\mathbf{b}\|}\right)^{\frac{1}{|\tau|+1}}}\mu(B),$$

  para todo $t > 0$, donde $\|\mathbf{b}\|_\tau = \prod_{i\in\tau} \|b_i\|_{Osc_{\exp L}}$ y $f_i^* = M^{\lfloor r\rfloor}_{\mathscr{B}}(|f_i|^r)^{\frac{1}{r}}$.

- Desigualdades mixtas:

- Desigualdades mixtas:
  Supongamos que $A_{1,\mathscr{B}} \subset \cup_{s>1} RH_{s,\mathscr{B}}$. Si $w \in A_{1,\mathscr{B}}$ y $v^{\frac{r}{m}} \in A_{\infty,\mathscr{B}}$ entonces
$$\left\| \frac{T(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{r}{m},\infty}(wv^{\frac{r}{m}})} \lesssim \left\| \frac{\mathcal{M}_{\mathscr{B},r}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{r}{m},\infty}(wv^{\frac{r}{m}})}.$$

- Desigualdad de tipo fuerte:

- Desigualdad de tipo fuerte:
  Para todo $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ con $r < p_1, \ldots, p_m < \infty$ y $\vec{w} \in A_{\frac{\vec{p}}{r}, \mathscr{B}}$

$$\|T\|_{L^{p_1}(w_1) \times \cdots \times L^{p_m}(w_m) \to L^p(w)} \lesssim C_T \mathcal{N}_{\vec{p}, \vec{w}} [w]_{A_{\frac{\vec{p}}{r}}}^{\max_{1 \leq i \leq m} \{p, \left(\frac{p_i}{r}\right)'\}}$$

donde $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}$ y $w = \prod_{i=1}^{m} w_i^{\frac{p}{p_i}}$.

- Desigualdad de tipo fuerte:
Para todo $\vec{p}=(p_1,\dots,p_m)$ con $r<p_1,\dots,p_m<\infty$ y $\vec{w}\in A_{\frac{\vec{p}}{r},\mathscr{B}}$

$$\|T\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m}(w_m)\to L^p(w)} \lesssim C_T \mathcal{N}_{\vec{p},\vec{w}}[w]_{A_{\frac{\vec{p}}{r}}}^{\max_{1\le i\le m}\{p,\left(\frac{p_i}{r}\right)'\}}$$

donde $\frac{1}{p}=\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$ y $w=\prod_{i=1}^m w_i^{\frac{p}{p_i}}$.
Si $A_{\infty,\mathscr{B}}$ cumple una propiedad de reverse-Hölder sharp, entonces

$$\begin{aligned}\|T\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m}(w_m)\to L^p(w)} \lesssim & C_T \mathcal{N}_{1,\vec{p},\vec{w}} \sum_{\tau_2\subset\tau} \mathcal{N}_{2,\vec{p},\vec{w}}\|\mathbf{b}\|_\tau \\ & [w]_{A_{\frac{\vec{p}}{r}}}^{(|\tau|+1)\max_{1\le i\le m}\{p,\left(\frac{p_i}{r}\right)'\}}\end{aligned}$$

Si la base de bolas $\mathscr{B}$ cumple la condición de Besicovitch, esto es que si para cualquier colección $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ existe una subcolección $\mathscr{B}'' \subset \mathscr{B}'$ tal que

$$\bigcup_{B \in \mathscr{B}'} B = \bigcup_{B \in \mathscr{B}''} B \qquad \text{y} \qquad \sum_{B \subset \mathscr{B}''} \chi_B(x) \leq N, \quad x \in \Sigma$$

Si la base de bolas $\mathscr{B}$ cumple la condición de Besicovitch, esto es que si para cualquier colección $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ existe una subcolección $\mathscr{B}'' \subset \mathscr{B}'$ tal que

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}'} B = \bigcup_{B\in\mathscr{B}''} B \qquad \text{y} \qquad \sum_{B\subset\mathscr{B}''} \chi_B(x) \leq N, \quad x \in \Sigma$$

Para todo $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ con $r < p_1, \ldots, p_m < \infty$ y $\vec{w} \in A_{\frac{\vec{p}}{r},\mathscr{B}}$

$$\|T\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m}(w_m)\to L^p(w)} \lesssim C_T[w]_{A_{\frac{\vec{p}}{r}}}^{\max_{1\leq i\leq m}\{p,\left(\frac{p_i}{r}\right)'\}}$$

donde $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$ y $w = \prod_{i=1}^m w_i^{\frac{p}{p_i}}$

Si la base de bolas $\mathscr{B}$ cumple la condición de Besicovitch, esto es que si para cualquier colección $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ existe una subcolección $\mathscr{B}'' \subset \mathscr{B}'$ tal que

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}'} B = \bigcup_{B\in\mathscr{B}''} B \qquad \text{y} \qquad \sum_{B\subset\mathscr{B}''} \chi_B(x) \leq N, \quad x \in \Sigma$$

Para todo $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ con $r < p_1, \dots, p_m < \infty$ y $\vec{w} \in A_{\frac{\vec{p}}{r},\mathscr{B}}$

$$\|T\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m}(w_m)\to L^p(w)} \lesssim C_T[w]_{A_{\frac{\vec{p}}{r}}}^{\max_{1\leq i\leq m}\{p,\left(\frac{p_i}{r}\right)'\}}$$

donde $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$ y $w = \prod_{i=1}^m w_i^{\frac{p}{p_i}}$
Si $A_{\infty,\mathscr{B}}$ cumple una propiedad de reverse-Hölder sharp, entonces

$$\|T\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m}(w_m)\to L^p(w)} \lesssim C_T[w]_{A_{\frac{\vec{p}}{r}}}^{(|\tau|+1)\max_{1\leq i\leq m}\{p,\left(\frac{p_i}{r}\right)'\}}$$

GRACIAS!!